Tentamen Dynamische Systemen
3 Juli 2006

1 Typisch gedrag

Beschouw een gladde functie $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en daarbij de tweede orde differentiaalvergelijking

$$x'' = -\frac{dV}{dx}(x). \tag{1}$$

Schrijf deze bewegingsvergelijking als een dynamisch systeem met als toestandsruimte het (x, y)-fasevlak, waarbij $y = x'$.

1. Toon aan dat het bijbehorende vector veld divergentie 0 heeft. Bewijs met behulp hiervan dat het bijbehorend dynamisch systeem geen attractoren kan hebben.

2. Omschrijf voor $V(x) = \cos x$ het typische gedrag van het bijbehorende dynamische systeem. Schets de bijbehorende faseportretten.

3. Hoe verandert dit als we (1) veranderen tot

$$x'' = -\frac{dV}{dx}(x) - cx', \tag{2}$$

voor een constante $c > 0$? Schets opnieuw de bijbehorende faseportretten.

2 Translatiesystemen op de torus

Op de 2-torus beschouwen we translatievectoren Ω_1 en Ω_2. Verder is $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ een 'lineair' diffeomorfisme dat geïnduceerd is door een 2 bij 2 matrix A met gehele coëfficiënten en met $\det A = 1$. Toon aan dat

$$\varphi R_{\Omega_1} = R_{\Omega_2} \varphi$$

equivalent is met

$$\Omega_2 = A\Omega_1,$$

waarbij R_{Ω_j} de door Ω_j bepaalde translatie op de 2-torus is, $j = 1, 2$. Toon nu aan dat als deze vergelijkingen gelden, dat dan φ een conjugatie is tussen de door Ω_1 en Ω_2 gedefinieerde translatiesystemen.

3 Chaos

De verdubbelingsafbeelding $f : [0,1] \to [0,1]$ wordt gedefinieerd als

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{als } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{als } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

We beschouwen het discrete dynamische systeem dat ontstaat door iteratie van f.

1. Schets de grafieken van f en f^2 (de twee keer geïtereerde).

2. Toon aan dat:

   (a) De punten $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ precies de begintoestanden zijn met uiteindelijk periodieke evoluties.

   (b) Dat er minstens een punt $x \in [0,1]$ bestaat waarvan de evolutie dicht in $[0,1]$ ligt.

   (Hint: gebruik symbolische dynamica.)

3. Gegeven een dichte baan $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) | n \geq 0\}$, toon dan voor de bijbehorende waarde van de verstrooiïngsexponent E aan dat $E = \ln 2$.